

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования «Саратовский государственный технический  
университет имени Гагарина Ю.А.»

Профессионально-педагогический колледж



УТВЕРЖДАЮ

Директор

Профессионально-педагогического  
колледжа СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Т.И. Кузнецова

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
по дисциплине  
ОП.01. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ**

специальность  
**08.02.15 ИНФОРМАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ**

Методические рекомендации рассмотрены  
на заседании цикловой методической комиссии

технических специальностей  
Председатель ЦМК \_\_\_\_\_ Е.Э.Воеводина

Саратов 2024

Методические рекомендации разработаны на основе рабочей программы дисциплины ОП.01. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) среднего профессионального образования по специальности (далее – СПО) 08.02.15 Информационное моделирование в строительстве, утверждённого приказом Министерства Просвещения РФ от 13.07.2023 г. № 531

Разработчик:

Попова О.Н. - преподаватель ППК СГТУ имени Гагарина Ю.А.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
Расчетная работа №1. «Приближенные вычисления».....	5
Расчетная работа № 2. «Решение уравнений, неравенств и систем уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера» .....	10
Расчетная работа № 3.«Соотношения в прямоугольных и косоугольных треугольниках» .....	15
Расчетная работа № 4. «Площадь поверхности композиции параллелепипедов» .....	24
Расчетная работа № 5. «Построение эллипса».....	29
Расчетная работа № 6. «Составления уравнения параболы».....	32
Расчетная работа № 7. «Приложение I и II производной».....	35
Расчетная работа № 8. «Приложение определенного интеграла» .....	46
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ .....	50

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации разработаны в помощь студентам при выполнении ими внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине «Математика». По данной дисциплине предусматривается выполнение внеаудиторных работ, охватывающих все разделы рабочей учебной программы. Выполнение самостоятельных работ предусматривает своей целью закрепление теоретических знаний и приобретение необходимых практических умений по программе. Учебный материал рекомендуется изучать в той последовательности, которая дана в методических указаниях:

- ознакомление с краткими теоретическими сведениями;
- изучение решения типовых примеров;
- выполнения чертежа и таблицы ответов;
- решение задания своего варианта;
- внесения ответов с учетом указанной погрешности.

При изучении материала необходимо соблюдать единство терминологии, обозначений, единиц измерения и указанной погрешности.

В соответствии с учебным планом на самостоятельную работу студентов отводится 14 часов.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности студентов: самостоятельности, ответственности и организованности, творческой инициативы;
- формирования самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

### Виды заданий для самостоятельной работы

- *Для овладения знаниями:* ознакомлением с материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), конспектирование кратких теоретических сведений (предоставлены к каждой расчетной работе).
- *Для закрепления и систематизации знаний:* конспектирование и решение типовых примеров.
- *Для формирования умений:* выполнение чертежа, решение расчетной работы в соответствии с вариантом.

### Формы самостоятельной работы

1. Поиск информации в различных источниках и ее практическая обработка.
2. Составление конспектов.
3. Выполнение расчетных работ.

Критерии оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность общеучебных умений;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Контроль выполненной самостоятельной работы осуществляется индивидуально, при проверке расчетных работ.

## Расчетная работа №1. «Приближенные вычисления»

**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о приближенных вычислениях; закрепить навыки решения тематических задач; проверить знания учебного материала.

### 1. Краткие сведения из теории

*Пример.*

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

Выпишем приближенные значения данного числа:

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \quad 1,4^2 = 1,96$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad 1,41^2 = 1,9881 \approx 2$$

$$\sqrt{2} \approx 1,42 \quad 1,42^2 = 2,0164 \approx 2$$

Итак,  $\sqrt{2}$  имеет бесконечное число знаков, выписать которые невозможно. Для работы с  $\sqrt{2}$  приближают указанные выше приближения, и при возведении  $\sqrt{2}$  в квадрат, мы получаем 2 с недостатком или избытком.

Проверим (рис. 1):

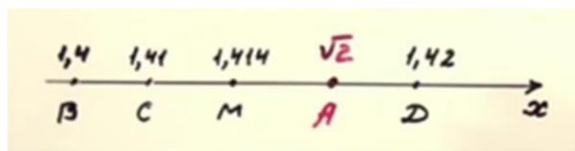


Рис. 1. Числовая ось

### Погрешность приближения

Возможно приближение по недостатку и избытку.

Например,

$$1,41 \approx \sqrt{2}, \text{ но } 1,41 < \sqrt{2} \text{ (по недостатку)}$$

$$1,42 \approx \sqrt{2}, \text{ но } 1,42 > \sqrt{2} \text{ (по избытку).}$$

**Определение:**

Погрешностью приближения (абсолютной погрешностью) называется модуль разности между точным значением величины  $x$  и её приближенным значением величины  $a$  ( $|x - a|$ ).

*Пример.*

$$\sqrt{2} \approx 1,4; \quad |\sqrt{2} - 1,4| = \sqrt{2} - 1,4 \text{ – абсолютная погрешность (длина AB)}$$

$\sqrt{2} \approx 1,42$ ;  $|\sqrt{2} - 1,42| = 1,42 - \sqrt{2}$  абсолютная погрешность (длина DA) (рис. 2)

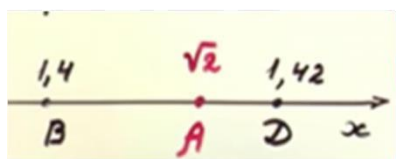


Рис. 2. Погрешности на числовой оси

*Определение:*

Если  $a$  – приближенное значение числа  $x$  и  $|x - a| \leq h$ , то говорят, что погрешность приближения не превосходит  $h$ , или что число  $x$  равно с точностью до  $h$ .

Пример.  $\pi \approx 3,141592$  Используя правило округления

1.  $\pi \approx 3,142$  – с точностью до 0,001

2.  $\pi \approx 3,14$  – с точностью до 0,01

3. Архимед установил, что  $\frac{\text{длина окружности}}{\text{диаметру}} = \frac{22}{7}$

Доказано:  $\frac{22}{7}$  – приближение числа  $\pi$  с точностью до 0,002.

То есть,  $|\pi - \frac{22}{7}| \leq 0,002$

4.  $\pi \approx 3,14$  с точностью до 0,01

Это значит, что  $|\pi - 3,14| \leq 0,01$

*Пример.*

Для числа  $\pi = 3,141592\dots$  пользуются приближённым равенством:

1)  $\pi \approx 3,141$  — это называют приближённым значением (или приближением) числа  $\pi$  по недостатку с точностью до 0,001  
или

2)  $\pi \approx 3,142$  — это называют приближённым значением (приближением) числа  $\pi$  по избытку с точностью до 0,001.

Приближение по недостатку и приближение по избытку называют округлением числа.

Погрешностью приближения  $h$  (абсолютной погрешностью) называют модуль разности между точным значением величины  $x$  и её приближённым значением  $a$ : погрешность приближения — это  $|x - a|$ .

Погрешность приближённого равенства  $\pi \approx 3,141$  или  $\pi \approx 3,142$  выражается как  $|\pi - 3,141|$  или соответственно как  $|\pi - 3,142|$ .

### *Правило округления*

Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно брать приближение по недостатку; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то нужно брать приближение по избытку.

$\pi = 3,141592\dots$  С точностью до 0,001 имеем  $\pi \approx 3,142$ ; здесь первая отбрасываемая цифра равна 5 (на четвертом месте после запятой), поэтому взяли приближение по избытку.

### *Пример.*

С точностью до 0,0001 имеем  $\pi \approx 3,1416$  — и здесь взяли приближение по избытку, поскольку первая отбрасываемая цифра (на пятом месте после запятой) равна 9.

А вот с точностью до 0,01 надо взять приближение по недостатку:  $\pi \approx 3,14$ .

Если  $a$  — приближённое значение числа  $x$  и  $|x - a| \leq h$ , то говорят, что абсолютная погрешность приближения не превосходит  $h$  или что число  $x$  равно числу  $a$  с точностью до  $h$ .

## **2. Решение типовых примеров**

### *Пример 1.*

Найти верные и сомнительные цифры числа  $a = 945,673 \pm 0,03$ .

Решение.

Здесь  $a = 945,673$ ,  $\Delta a = 0,03$ . Цифра 6 представляет собой цифру десятых долей, т.е. единицу этого разряда запишем так: 0,1. Сравним:

$$0,1 > 0,03$$

следовательно цифра 6 верная и цифры 9, 4, 5 стоящие левее тоже верные.

Проверим цифру 7:

$$0,01 < 0,03$$

Следовательно цифра 7 сомнительная и цифра 3 стоящая за цифрой 7 тоже сомнительная.

### *Пример 2.*

Вычислить  $x = \frac{2,48 \cdot 0,3665}{5,643}$ .

Решение.



Наименьшее количество значащих цифр, равное 3, содержит число 2,48; поэтому остальные числа округляем до трех значащих цифр. Следовательно:

$$x = \frac{2.48 \cdot 0.3665}{5.643} \approx 0.161 .$$

### 3. Самостоятельная работа

*Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:*

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

*Вычислить и округлить до значащих цифр:*

1.	$\frac{2,487 \times 3,512}{0,4771} \approx$	8.	$\sin 27^\circ 45' \approx$
2.	$\frac{5,72^2 \times \sqrt{82,1}}{\pi} \approx$	9.	$\cos \frac{8\pi}{11} \approx$
3.	$\frac{\sqrt[4]{75} \times \pi^2}{5,2^3} \approx$	10.	$\cot 94^\circ 4' \approx$
4.	$3,81^{2,44} \approx$	11.	$\sin \frac{4\pi}{9} \times \operatorname{tg} 34^\circ 5' \times \cos \frac{3\pi}{4} \approx$
5.	$\sqrt{75,1^2 + 23,8^2} \approx$	12.	$\sin A = 0,3456 \Rightarrow \hat{A} \approx$
6.	$\sqrt{8,42^2 - 7,85^2} \approx$	13.	$\cos B = \frac{23,75}{50,81} \Rightarrow \hat{B} \approx$
7.	$(2\frac{7}{9} - 1\frac{2}{3}) \times 4\frac{5}{7} \approx$	14.	$\operatorname{tg} C = 0,37186 \Rightarrow \hat{C} \approx$
15.	$\cos A = 0,2103; \sin B = 0,4758; \operatorname{tg} 0,9732$ $\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} \approx$ <div style="text-align: right; margin-right: 50px;"> <math>\underbrace{\phantom{\operatorname{tg} 0,9732}}_{C=}</math> </div>		
16.	$17,3X^2 - 54,1x + 20,8 = 0$ $X_1 \approx \quad X_2 \approx$		
17.	$\frac{(34,2^2 - 874)^2 \times \cos 58^\circ 6'}{2,57^3 \times \sqrt{0,182} \times \operatorname{tg} 34^\circ 25'} \approx$		

#### 4. Контрольные вопросы по теме

1. Дать определение приближенного числа.
2. Дать определение абсолютной погрешности.
3. Что называется границей абсолютной погрешности.
4. Сформулировать определения верной и сомнительной цифры.
5. Дать определение относительной погрешности.
6. Дать определение значащих цифр.

#### 5. Литература

О[1] § 4, 5, 6; № 66, 77

## Расчетная работа № 2. «Решение уравнений, неравенств и систем уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера»

**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о решениях систем линейных уравнений с тремя неизвестными из трех уравнений; закрепить навыки решения систем методом Крамера; проверить знания учебного материала.

### 1. Краткие сведения из теории

Правило Крамера является методом решения квадратной системы линейных алгебраических уравнений.

Под решением системы понимается всякая тройка чисел  $(x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющая этой системе, т.е. при подстановке которых в систему линейных уравнений получаются верные равенства.

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе  $\Delta$  последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Если определитель  $\Delta$  системы (1) отличен от нуля, то существует, и притом единственное, решение этой системы, и оно выражается формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (2)$$

Формулы (2) называются *формулами Крамера*.

*Теорема (правило Крамера).* Если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то рассматриваемая система (1)

имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

Неизвестные стандартной линейной системы с ненулевым определителем представляют собой дроби, знаменатели которых есть определитель системы, а числители равны соответствующим дополнительным определителям.

## 2. Решение типовых примеров

*Пример 1.*

Найдем решение системы трех уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Составим определитель системы, дополнительные определители и вычислим их методом треугольников.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 18 - 27 - 8 - 1 = -18 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = -1,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7$$

Подставляя полученные результаты в формулы Крамера (2) находим единственное решение системы линейных уравнений:

$$x = -\frac{5}{18}, \quad y = \frac{1}{18}, \quad z = \frac{7}{18}.$$

### Пример 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 \cdot 4 - 11 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 26 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 8 - 10 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26 - 20 + 22 = -24.$$

Итак,  $x = 1, y = 2, z = 3$ .

### 3. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Решить систему уравнений методом Крамера (по вариантам):

Номер варианта	Система уравнений	Система уравнений
1.	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + z = 6 \\ 3x - 4y = \\ -2 \quad 2y - z = \\ 2 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x + 4y = -10 \\ 2x - 2y = \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ x + 5y + 2z = \\ 5 \quad 2x + 3y + 4z = \\ 3 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 4x + y = 15 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = \\ 4 \quad 4x - y - 3z = \\ 1 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} 5x - 2y - 6 = 0 \\ 7x - 5y - 4 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ x - 3y + 2z = 10 \\ 3x - 4y - z = 5 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ 3x + 2y - 5z = \\ -1 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = \\ 3 \quad 3x - y + 5z = \\ 2 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2x - 5y = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + 4z = 6 \\ 2x - y + 3z = \\ 11 \quad 4x + y - 5z = \\ 9 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} -2x + 7y = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \quad 6x - \\ 5y + 2z = 17 \end{cases}$
12.	$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = \\ -1 \quad 7x + 9y - 9z = \\ 5 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 23x + \\ y + z = 8 \end{cases}$
14.	$\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 3x - 2y = \\ -6 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$

<b>15.</b>	$\begin{cases} 9x + 2y = 8 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$	$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ \begin{cases} 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \end{aligned}$
------------	---	--

<b>16.</b>	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$	$x + 2y + z = 8$ $\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$
<b>17.</b>	$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$	$2x + z = 6$ $\begin{cases} 3x - 4y = \\ -2 \end{cases}$ $2y - z = 2$
<b>18.</b>	$\begin{cases} x + 4y = -10 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$	$x + 3y - 6z = 12$ $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$
<b>19.</b>	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$	$3x + 4y + 2z = 8$ $\begin{cases} x + 5y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$
<b>20.</b>	$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 4x + y = 15 \end{cases}$	$2x + 4y + z = 4$ $\begin{cases} 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$
<b>21.</b>	$\begin{cases} 5x - 2y - 6 = 0 \\ 7x - 5y - 4 = 0 \end{cases}$	$2x + y - 3z = -1$ $\begin{cases} x - 3y + 2z = 10 \\ 3x - 4y - z = 5 \end{cases}$
<b>22.</b>	$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$	$x + 2y - z = 9$ $\begin{cases} 2x - y + 3z = 13 \\ 3x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$
<b>23.</b>	$\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$	$x + 2y + 3z = 5$ $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$
<b>24.</b>	$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$	$2x - 4y + 3z = 1$ $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$
<b>25.</b>	$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2x - 5y = 6 \end{cases}$	$x - 2y + 4z = 6$ $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x + y - 5z = 9 \end{cases}$
<b>26.</b>	$\begin{cases} -2x + 7y = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$	$2x - 3y + z = 2$ $\begin{cases} 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$

#### 4. Контрольные вопросы по теме

1. Дать определение системы линейных уравнений из двух уравнений с двумя неизвестными.
2. Дать определение системы линейных уравнений из трех уравнений с тремя неизвестными.
3. В чем заключается метод Крамера.
4. Условие решения системы методом Крамера.

#### 5. Литература

Э[3] § 8

О[1] § 4.3; 4.5; 4.6; № 4.38



## Расчетная работа № 3. «Соотношения в прямоугольных и косоугольных треугольниках»

### (Расчет фермы)

**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о решениях прямоугольных и косоугольных треугольников; закрепить навыки решения теоремы Пифагора, теоремы синусов, теоремы косинусов, подобие треугольников и соотношениях в прямоугольных треугольниках; проверить знания учебного материала.

#### 1. Краткие сведения из теории

*Прямоугольный треугольник:*



*Теорема Пифагора:*

Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где  $a, b$  – катеты,  $c$  – гипотенуза.

*Формулы площади ( $S$ ) прямоугольного треугольника:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

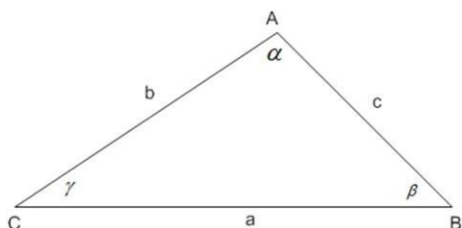
Косинус острого угла прямоугольного прилежащего катета к гипотенузе.	треугольника	равен	отношению
	$\cos \alpha = AC:AB.$		

Синус острого угла прямоугольного противолежащего катета к гипотенузе.	треугольника	равен	отношению
	$\sin \alpha = BC:AB.$		

Тангенс острого угла прямоугольного противолежащего катета к прилежащему.	треугольника	равен	отношению
	$\operatorname{tg} \alpha = BC:AC.$		

Котангенс острого угла прямоугольного прилежащего катета к противолежащему.	треугольника	равен	отношению
	$\operatorname{ctg} \alpha = AC:BC.$		

*Косоугольный треугольник:*



*Теорема синусов:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

*Теорема косинусов:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

*Площадь треугольника:*

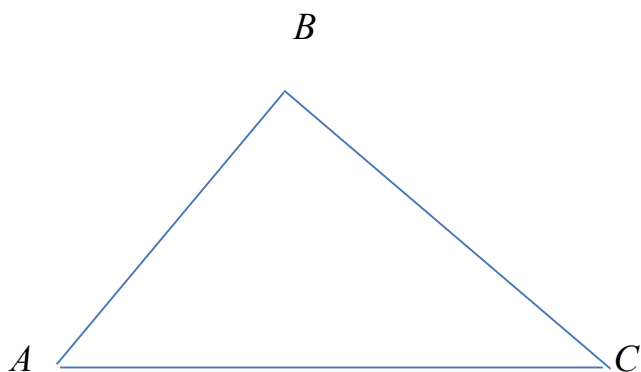
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta$$

## 2. Решение типовых примеров

*Пример.*

Дано: треугольник  $\triangle ABC$ , стороны треугольника  $a=10$ ,  $b=7$ ,  $\angle A = 60^\circ$ .

Решить треугольник: Угол по сторонам треугольника  $\angle B$ ,  $\angle C$ , сторону  $c$  и площадь треугольника.



*Решение:*

Известно, что формула синуса

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ получаем выражение}$$

$$\sin B = \frac{\sin A \cdot b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7}{10} = \frac{7\sqrt{3}}{20} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7\sqrt{3}}{20}$$

$$\angle B = \arcsin\left(\frac{7\sqrt{3}}{20}\right) = 37^\circ 19'$$

$$\text{Тогда } \angle C = 180^\circ - (60^\circ + 37^\circ 19') = 82^\circ 41'$$

Используя теорему синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ получаем равенство}$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{0,9919} \Rightarrow c = \frac{0,9919 \cdot 7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 11$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \angle C$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \sin (82^\circ 41') = 34,7$$

Ответ:  $\angle B = 37^\circ 19'$ ;  $\angle C = 82^\circ 41'$ ;  $c \approx 11$ ;  $S = 34,7$  (кв.ед.).

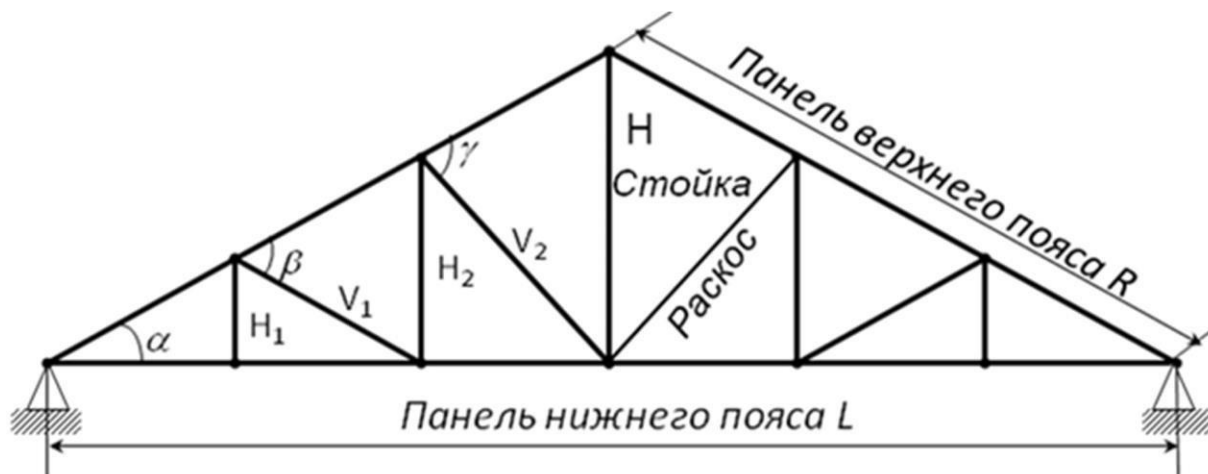
### 3. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

#### Пример выполнения работы

Запроектирована симметричная деревянная ферма с равноотстоящими друг от друга вертикальными стойками, где Н - центральная стойка; Н<sub>1</sub> и Н<sub>2</sub> - боковые стойки; L - панель нижнего пояса; R - панель верхнего пояса; α - угол наклона ската фермы; β и γ - внутренние углы фермы; V<sub>1</sub> и V<sub>2</sub> - раскосы



Заданы (в зависимости от варианта) размеры двух элементов:  $(L;H)$ ,  $(L;\alpha)$ , либо  $(H;\alpha)$ .  
 Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале.  
 Определить размеры всех остальных элементов фермы. Результаты расчетов записать в таблицу:

L, м	H, м	H <sub>1</sub> , м	H <sub>2</sub> , м	R, м	V <sub>1</sub> , м	V <sub>2</sub> , м	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
* ?	* ?	?	?	?	?	?	* ?	?	?

Линейные размеры представить с точностью:

Интервал размеров (мм)	св. 120 до 400	св. 400 до 1000	св. 1000 до 2000	св. 2000 до 4000	св. 4000 до 6000	св. 6000 до 8000	св. 8000 до 10000
предельные отклонения (мм)	$\pm 1,0$	$\pm 1,5$	$\pm 2,5$	$\pm 5$	$\pm 10$	$\pm 15$	$\pm 20$

Угловые размеры – с точностью  $\pm 0,5^\circ$ .

№ вар.	L, м	H, м	№ вар.	L, м	Угол $\alpha$ , градусы	№ вар.	H, м	Угол $\alpha$ , градусы
1	5,1	1,4	11	4,0	17	21	1,6	42

Допустим, у студента первый вариант, исходные данные для этого варианта:  $L=5,1$  (м);

$H=1,4$  (м)

Немного о самой работе. Она проще расчетов, которые производятся при реальной проектной работе над строительными конструкциями: упрощение касается того, что на этом этапе не интересуют особенности материала (кроме того, что материал – дерево), сечения, прочностные характеристики – пока только геометрия.

Тем не менее некоторые этапы работы присутствуют при настоящих расчетах (из жизни, так сказать).

Что такое исходные данные? Представьте, что заказчику нужна двускатная крыша шириной 5,1 м и высотой – 1,4 м. Почему именно такая – не наше дело, наше дело рассчитать детали так, чтобы при сборке на стройплощадке получилась ферма, а не песочница, причем размеры фермы соответствовали пожеланию заказчика.

Какие знания и умения нам понадобятся, чтобы обеспечить выполнение этого задания? – не так уж и много:

- Соотношения сторон и углов в прямоугольном треугольнике
- Соотношения сторон и углов в произвольном треугольнике
- Правила приближенных вычислений без строгого учета погрешностей
- Умение округлять приближенные значения с заданной точностью

Про первые два пункта пояснять ничего не буду, если студент этого не знает и не умеет – ему пора подумать о своем будущем, не связанном со стройплощадкой.

Приближенные вычисления – тоже не очень сложно, но так и быть – напомним.

В заданиях с приближенными вычислениями, без строгого учета погрешностей, выполняй несколько простых правил:

1. В результатах действий 1-й ступени («+» и «-») оставляем столько **десятичных разрядов**, сколько их было в компоненте действия с наименьшим количеством **десятичных разрядов** – остальное округляем (например:  $12,33 + 0,5456 - 3,577662 \approx 9,09898 \approx 9,10$ )

2. В результатах действий 2-й и 3-й ступени («\*»; «:»; «^» или «√») оставляем столько **значащих цифр**, сколько их было в компоненте действия с наименьшим количеством **значащих цифр** – остальное округляем (например:

$$\frac{5,21 \cdot 0,3141}{12,454} \approx 0,1314004336 \approx 0,131)$$

3. Во всех промежуточных результатах оставляем на две сомнительные цифры больше, которые в окончательном результате округляем например:  $A = \arcsin \frac{1,66 \cdot \sin 37^\circ 44'}{b}$

$b = \sqrt{16,6^2 + 15,4^2 - 2 \cdot 16,6 \cdot 15,4 \cdot \cos 37^\circ 44'} \approx 10,410$  (зеленым выделены запасные сомнительные цифры, **не округляем раньше времени!**)

$$A = \arcsin \frac{16,6 \cdot \sin 37^\circ 44'}{10,410} \approx 77^\circ 23' 32'' \approx 77^\circ 24')$$

Округляя углы, полученные с помощью обратных тригонометрических функций, выполняем следующее правило:

Если стороны известны с точностью **две** значащих цифры – углы округляем до **градусов** (последняя цифра в градусах – сомнительная)

Если стороны известны с точностью **три-четыре** значащих цифры – углы округляем до **минут** (последняя цифра в минутах – сомнительная)

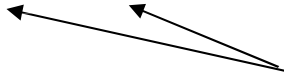
Если стороны известны с точностью **пять и более** значащих цифр (что бывает редко) – углы округляем до **секунд** (последняя цифра в секундах – сомнительная)

### Выполнение расчетов

Ну, смело в бой!

Рисуем черновик таблицы результатов:

L, м	H, м	H <sub>1</sub> , м	H <sub>2</sub> , м	R, м	V <sub>1</sub> , м	V <sub>2</sub> , м	α	β	γ
5,1	1,4								



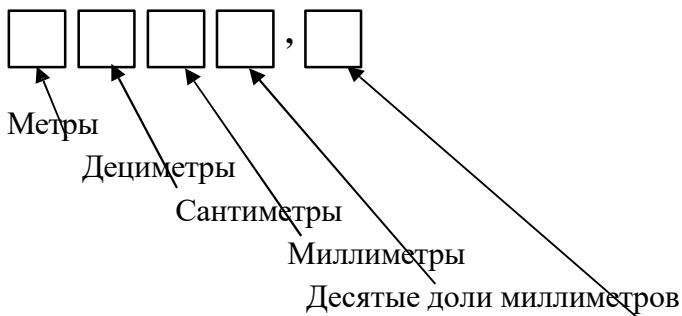
Вносим данные значения.

Определяем порядок вычислений (количество значащих цифр в промежуточных результатах, для чего оооочень примерно прогнозируем результаты: для стоек размеры будут что-то около метра. Смотрим в другую таблицу:

Линейные размеры представить с точностью:

Интервал размеров (мм)	св. 120 до 400	св. 400 до 1000	св. 1000 до 2000	св. 2000 до 4000	св. 4000 до 6000	св. 6000 до 8000	св. 8000 до 10000
предельные отклонения (мм)	± 1,0	± 1,5	± 2,5	± 5	± 10	± 15	± 20

Значит в итоге получатся значения с последним разрядом – десятые доли миллиметра. (таблица, кстати действующая – по среднему классу точности для деревянных изделий). Покажу для наглядности:



Итого – пять значащих цифр в итоговом результате, значит во всех промежуточных – семь (это с большим запасом, но он, как известно карман не тянет). Кстати - решайте сами в каких единицах вести расчёты в метрах или миллиметрах, но в итоговую таблицу просят выдать метры. Поэтому, если хотите оставить миллиметры в ответе – внесите в шапку таблицы соответствующее изменение. В каком порядке находить длины – ваше дело, например, найдем сначала **R**

$$R = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2}$$

Инженерный калькулятор выдаст десять значащих цифр, нам для окончательного результата нужно пять, но если это значение нам понадобится для дальнейших расчетов, нужен запас в две дополнительные цифры:

**R ≈ 2, 909038** м, или 2909,038 мм (зеленым выделены запасные сомнительные цифры)

Следующий шаг – округление по заданию: находим нужный интервал размеров в таблице

Линейные размеры представить с точностью:

Интервал размеров (мм)	св. 120 до 400	св. 400 до 1000	св. 1000 до 2000	св. 2000 до 4000	св. 4000 до 6000	св. 6000 до 8000	св. 8000 до 10000
предельные отклонения (мм)	$\pm 1,0$	$\pm 1,5$	$\pm 2,5$	$\pm 5$	$\pm 10$	$\pm 15$	$\pm 20$

Осталось округлить число 2909,0 с точностью до 5.

Во-первых: округляем до нужного разряда:  $2909,0 \approx 2909$ .

Во-вторых: округляем с заданной точностью:  $2909 \approx 2910$  (значение должно получиться кратным заданной точности, максимально близким к округляемому: ближайшие числа кратные 5 это 2910 (с избытком) или 2905 (с недостатком), если в уме трудно, особенно если забыты признаки делимости, можно воспользоваться

простым алгоритмом: делим округляемое на точность:  $2909 = 581,8 \div 5$ ; округляем

полученный результат до целого:  $581,8 \approx 582$  и умножаем на точность:  $582 \cdot 5 = 2910$ . Если даже это не по силам – можно воспользоваться функцией в Excel: ОКРУГЛТ(число;точность).

Итак, мы готовы занести в таблицу результатов первое найденное значение!

L, м	H, м	H <sub>1</sub> , м	H <sub>2</sub> , м	R, м	V <sub>1</sub> , м	V <sub>2</sub> , м	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
5,1	1,4			2,910					

2,909038

Обратите внимание, под ячейкой выписан промежуточный результат и стало видно, что цифр в нем больше на три, а не на две. Не произойдет ничего страшного если округлить еще грубее ( $2,909038 \approx 2,90904$ ).

Теперь попробуем найти  $\alpha$ .

$$\alpha = \arctg \frac{2H}{L}$$

$$\alpha \approx 28,768 \approx 28,8 \approx 29,0 \text{ (Угловые размеры – с точностью } \pm 0,5^0)$$

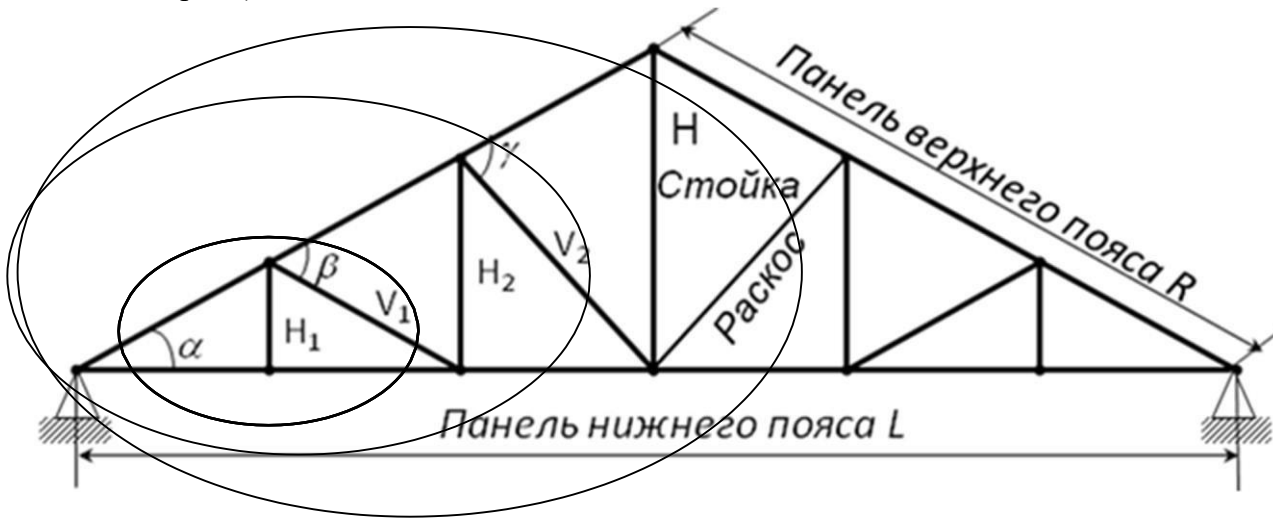
Вносим полученный результат в таблицу, под ячейкой - промежуточный:

L, м	H, м	H <sub>1</sub> , м	H <sub>2</sub> , м	R, м	V <sub>1</sub> , м	V <sub>2</sub> , м	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
5,1	1,4			2,910			29,0		

2,909038

28,768

Размеры элементов  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  можно найти по т. Пифагора, но проще воспользоваться свойством подобия треугольников (плохо, если из всей геометрии в мозгах осталась только Великая теорема):



Треугольники, обведенные овалами – подобны (если захотите воспользоваться – не забудьте доказать подобие).

Таким образом можно вычислить без больших проблем сразу несколько величин:

$$H_1 = \frac{H}{3} = \frac{1,4}{3} = 0,4(6) \approx 0,466667 \text{ м} = 466,667 \text{ мм (шесть значащих цифр)}.$$

Округляем с точностью 1,5 мм:  $466,667 \approx 466,7 \approx 466,5 \text{ мм}$  (или 0,4665 м)

$$H_2 = \frac{2H}{3} = \frac{2 \cdot 1,4}{3} = 0,9(3) \approx 0,933333 \text{ м} = 933,333 \text{ мм}$$

Округляем с точностью 1,5 мм:  $933,333 \approx 933,3 \approx 933,0 \text{ мм}$  (или 0,9330 м)

$$V_1 = \frac{R}{3} = \frac{2,909038}{3} \approx 0,969679 \text{ м} = 969,679 \text{ мм (Для R берем значение не из$$

таблицы, а сохраненный нами промежуточный результат!)

Округляем с точностью 1,5 мм:  $969,679 \approx 969,7 \approx 969,0 \text{ мм}$  (или 0,9690 м) Не забываем заполнять таблицу:

L, м	H, м	H <sub>1</sub> , м	H <sub>2</sub> , м	R, м	V <sub>1</sub> , м	V <sub>2</sub> , м	α	β	γ
5,1	1,4	0,4665	0,9330	2,910	0,9690		29,0		

0,466667

0,933333

2,909038

0,969679

28,768

Ну, думаю, дальше все понятно. Величину  $V_2$  находим по т. Пифагора:

$$V_2^2 = \sqrt{\frac{H_2^2}{2} + \left(\frac{L}{6}\right)^2} = \sqrt{0,933333^2 + \left(\frac{5,1}{6}\right)^2} \approx 1,26238 \text{ м} = 1262,38 \text{ мм}$$

Округляем с точностью 2,5 мм:  $1262,38 \approx 1262,4 \approx 1262,5 \text{ мм}$  (или 0,4665 м)



#### ***4. Контрольные вопросы по теме***

1. Сформулировать теорему Пифагора.
2. Сформулировать теорему синусов.
3. Сформулировать теорему косинусов.
4. Сформулировать признаки подобия треугольников.
5. Сформулировать отношения сторон в прямоугольном треугольнике.

#### ***5. Литература***

Э[3] Глава 2

## Расчетная работа № 4. «Площадь поверхности композиции параллелепипедов» (Вычисление расхода облицовочного материала на отделку пьедестала)

**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о применении стереометрических фигур; закрепить навыки решения объемов и площадей поверхностях призм, параллелепипедов; проверить знания учебного материала.

### 1. Краткие сведения из теории

*Формулы прямоугольного параллелепипеда:*

Площадь поверхности куба:  $S = 6a^2$

2.

У прямоугольного параллелепипеда есть еще одно измерение – объем параллелепипеда (обозначается как  $V$ ).

$$V = h \cdot m \cdot n.$$

Прямоугольники, которые составляют поверхность параллелепипеда, являются гранями параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед определяют 3-мя измерениями: Высота

(обозначают как  $h$ )

Длина (обозначают как  $m$ )

Ширина (обозначают как  $n$ )

Площадь всей поверхности параллелепипеда обозначают как  $S$ :  $S = (h \cdot m + h \cdot n + m \cdot n) \cdot 2$

В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d^2 = h^2 + m^2 + n^2.$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{б}} = 2c(a+b),$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{п}} = 2(ab + bc + ac).$$

## 2. Решение типовых примеров

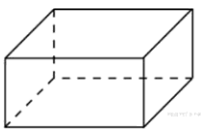
**Задача 1.** Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

Решение:

Объем прямоугольного параллелепипеда равен  $V = Sh$ , где  $S$  — площадь грани, а  $h$  — высота перпендикулярного к ней ребра. Имеем

$$V = Sh = 12 \cdot 4 = 48.$$

Ответ: 48.



**Задача 2.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.

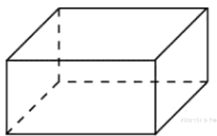
Решение:

Объем прямоугольного параллелепипеда равен  $V = Sh$ , где  $S$  — площадь грани, а  $h$  — высота перпендикулярного к ней ребра. Тогда площадь грани

$$S = \frac{V}{h} = \frac{24}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

**Задача 3.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



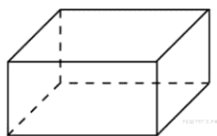
Решение:

Объем прямоугольного параллелепипеда равен  $V = Sh$ , где  $S$  — площадь грани, а  $h$  — высота перпендикулярного к ней ребра. Тогда

$$h = \frac{V}{S} = \frac{60}{12} = 5.$$

Ответ: 5.

**Задача 4.** Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.



Решение:

Объем куба  $V = a^3$  равен объему параллелепипеда

$$V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$$

Значит, ребро куба

$$a = \sqrt[3]{216} = 6.$$

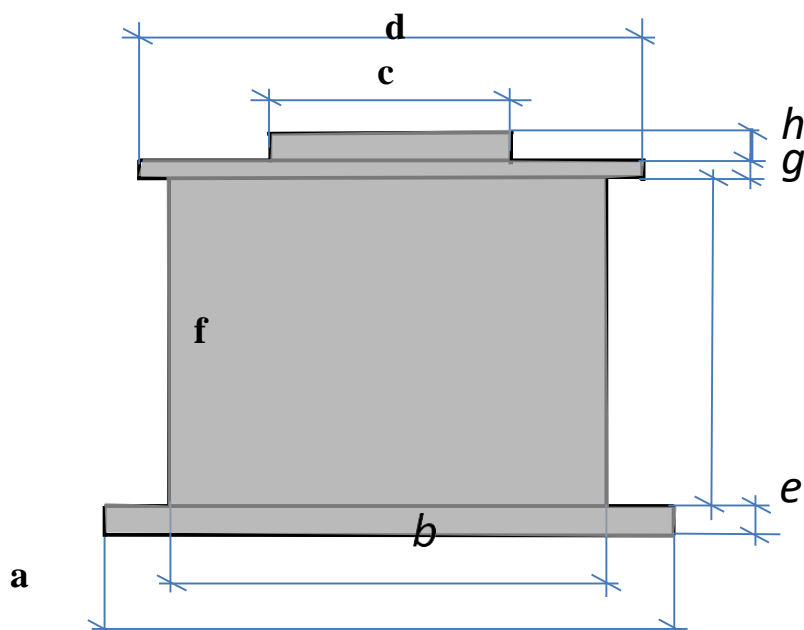
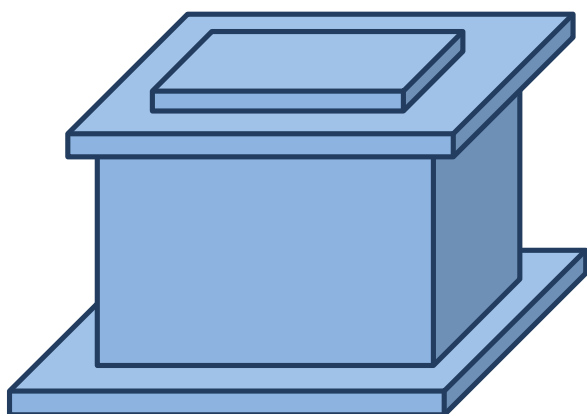
Ответ: 6.

### 3. Самостоятельная работа

*Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:*

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Пьедестал представляет собой композицию четырёх параллелепипедов с квадратными основаниями симметричными относительно центральной оси.



Вычислить расход облицовочного материала на отделку пьедестала, если на отделку 1 кв.м поверхности требуется 15 кг материала (низ основания не

облицовывается). Размеры пьедестала указаны в метрах. Ответ представить сточностью до 10 г.

Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале.

№ вар.	a	b	c	d	e	f	g	h
1	0,92	0,69	0,59	0,81	0,14	0,41	0,11	0,12
2	0,94	0,71	0,61	0,83	0,14	0,42	0,11	0,12
3	0,96	0,73	0,63	0,85	0,14	0,43	0,12	0,12
4	0,98	0,75	0,65	0,87	0,15	0,44	0,12	0,13
5	1,00	0,77	0,67	0,89	0,15	0,45	0,12	0,13
6	1,02	0,79	0,69	0,91	0,15	0,46	0,12	0,13
7	1,04	0,81	0,71	0,93	0,16	0,47	0,12	0,14
8	1,06	0,83	0,73	0,95	0,16	0,48	0,13	0,14
9	1,08	0,85	0,75	0,97	0,16	0,49	0,13	0,14
10	0,89	0,67	0,58	0,79	0,13	0,84	0,11	0,12
11	0,92	0,70	0,61	0,82	0,14	0,87	0,11	0,12
12	0,95	0,73	0,64	0,85	0,14	0,90	0,11	0,12
13	0,98	0,76	0,67	0,88	0,15	0,93	0,12	0,13
14	1,01	0,79	0,70	0,91	0,15	0,96	0,12	0,13
15	1,04	0,82	0,73	0,94	0,16	0,99	0,12	0,14
№ вар.	a	b	c	d	e	f	g	h
16	1,07	0,85	0,76	0,97	0,16	1,02	0,13	0,14
17	1,10	0,88	0,79	1,00	0,17	1,05	0,13	0,14
18	1,13	0,91	0,82	1,03	0,17	1,08	0,14	0,15
19	0,89	0,69	0,57	0,79	0,13	1,29	0,11	0,12
20	0,93	0,73	0,61	0,83	0,14	1,35	0,11	0,12
21	0,97	0,77	0,65	0,87	0,15	1,41	0,12	0,13
22	1,01	0,81	0,69	0,91	0,15	1,47	0,12	0,13
23	1,05	0,85	0,73	0,95	0,16	1,53	0,13	0,14
24	1,09	0,89	0,77	0,99	0,16	1,59	0,13	0,14
25	1,13	0,93	0,81	1,03	0,17	1,65	0,14	0,15
26	1,18	0,98	0,86	1,08	0,18	1,72	0,14	0,15
27	1,23	1,03	0,91	1,13	0,18	1,80	0,15	0,16
28	1,28	1,30	0,96	1,50	0,19	1,87	0,15	0,17
29	1,33	1,45	1,01	1,60	0,20	1,95	0,16	0,17
30	1,38	1,60	1,06	1,80	0,21	2,02	0,17	0,18

#### ***4. Контрольные вопросы по теме***

1. Дать определение призмы.
2. Дать определение параллелепипеда.
3. Назвать формулу объема параллелепипеда.
4. Назвать формулу площади поверхности параллелепипеда.

5.

#### ***Литература***

Э[3] Глава 3

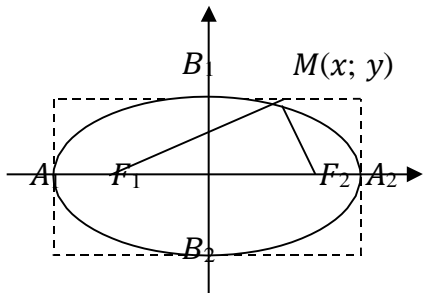
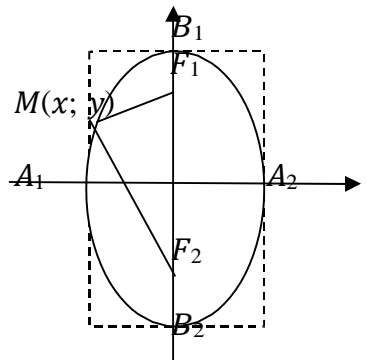
## Расчетная работа № 5. «Построение эллипса»

**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о кривых второго порядка; закрепить навыки построения эллипса; проверить знания учебного материала.

### 1. Краткие сведения из теории

*Эллипс* (от греческого elleipsis – недостаток, нехватка, опущение)

*Эллипсом* называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

		
Положение фокусов	$F_1, F_2 \in Ox$	$F_1, F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$	$F_1(0; c), F_2(0; -c)$
Соотношение между $a$ и $b$	$a > b$	$a < b$
Большая ось	$ A_1A_2  = 2a$	$ B_1B_2  = 2b$
Малая ось	$ B_1B_2  = 2b$	$ A_1A_2  = 2a$
Фокусное расстояние	$ F_1F_2  = 2c$	$ F_1F_2  = 2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$ –	$\varepsilon = \frac{c}{b}$ –
Соотношение между $a$ , $b$ и $c$	$a^2 - b^2 = c^2$	$b^2 - a^2 = c^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

### 2. Решение типовых примеров

*Пример.*

Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{26} = 1$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{10}; \\ b &= \sqrt{26}; \end{aligned} \quad a < b, \text{ первый случай.}$$

$$1) \text{ Большая ось } |B_1B_2| = 2b = 2\sqrt{26}; \quad \text{Малая ось } |A_1A_2| = 2a = 2\sqrt{10};$$

$$2) b^2 - a^2 = c^2;$$

$$c^2 = 26 - 10 = 16;$$

$$c = 4;$$

координаты фокусов  $F_1(0; c)$ ,  $F_2(0; -c)$ ;  $F_1(0; 4)$ ,  $F_2(0; -4)$ .

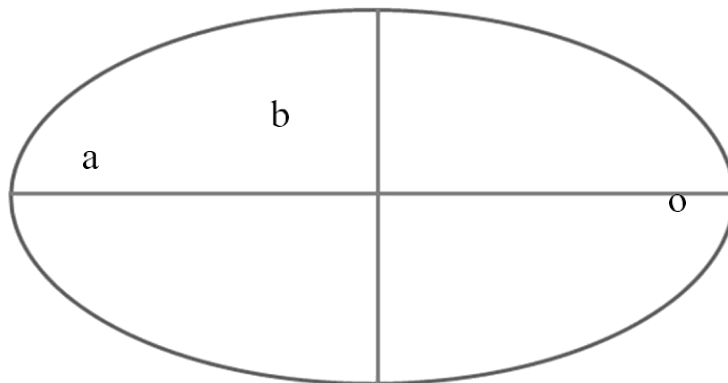
$$3) \text{Эксцентриситет } \varepsilon = \frac{c}{b}; \quad \varepsilon = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

### 3. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Заданы  $a$ ,  $b$  (полуоси эллипса).



Определить размеры элементов эллипса, результаты занести в таблицу:

	$a$ , мм	$b$ , мм	$c$ , мм	$e$	$S$ , см <sup>2</sup>
<b>по заданию</b>	*	*	?	?	?
<b>по построению</b>	?	?	?	?	?
<b><math>\Delta</math>, ед. изм.</b>	?	?	?	?	?
<b><math>\delta</math>, %</b>	?	?	?	?	?

Используя геометрическое определение, на миллиметровой бумаге, в масштабе 1:1, построить эллипс по заданным элементам.

Определить абсолютную и относительную погрешность построения, результаты занести в таблицу.

Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале.

№ вар.	$a$ , мм	$b$ , мм	№ вар.	$a$ , мм	$b$ , мм	№ вар.	$a$ , мм	$b$ , мм
-----------	----------	----------	-----------	----------	----------	-----------	----------	----------



1	64,00	38,00	11	74,00	48,00	21	84,00	58,00
2	64,00	40,00	12	74,00	50,00	22	84,00	60,00
3	66,00	40,00	13	76,00	50,00	23	86,00	60,00
4	66,00	42,00	14	76,00	52,00	24	86,00	62,00
5	68,00	42,00	15	78,00	52,00	25	88,00	62,00
6	68,00	44,00	16	78,00	54,00	26	88,00	64,00
7	70,00	44,00	17	80,00	54,00	27	90,00	64,00
8	70,00	46,00	18	80,00	56,00	28	90,00	66,00
9	72,00	46,00	19	82,00	56,00	29	92,00	66,00
10	72,00	48,00	20	82,00	58,00	30	92,00	68,00

#### *4. Контрольные вопросы по теме*

1. Дать определение эллипса.
2. Дать определение эксцентриситета эллипса.
3. Как влияет значение эксцентриситета на вид эллипса?
4. При каком значении эксцентриситета эллипс вырождается в окружность?
5. Назвать уравнение эллипса.

#### *5. Литература*

Э[3] Глава 6

## Расчетная работа № 6. «Составления уравнения параболы»

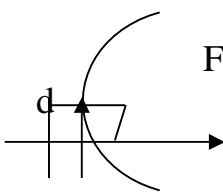
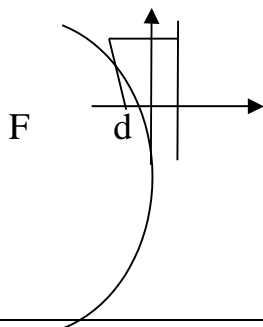
### (Расчет элементов пролета моста)

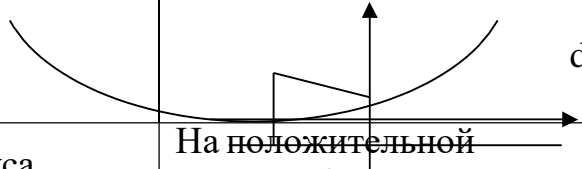
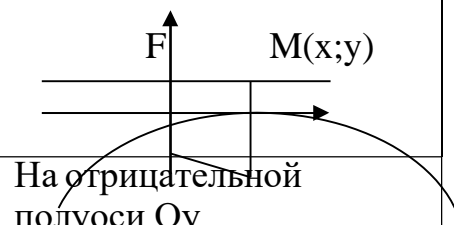
**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о применении кривых второго порядка; закрепить навыки решения тематических задач; проверить знания учебного материала.

#### 1. Краткие сведения из теории

Парабола (от греческого *parabole* – сопоставление, приближение, отклонение от прямого пути).

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой).

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Oх	На отрицательной полуоси Oх
Координаты фокуса	$F(\frac{p}{2}; 0)$	$F(-\frac{p}{2}; 0)$
Уравнение директрисы	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Oy	На отрицательной полуоси Oy
Координаты фокуса	$F(0; \frac{p}{2})$	$F(0; -\frac{p}{2})$

Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$

## 2. Решение типовых примеров

**Задача 1.** Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением  $y^2 = 8x$ .

Решение:

Определим расположение параболы на координатной плоскости. Это 1 случай (видно из заданного уравнения параболы). Найдем  $p$  из уравнения параболы  $y^2 = 2px$ .

$$2p = 8$$

$$p = 4$$

Ответ: координаты фокуса  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = F(2; 0)$ ;

уравнение директрисы параболы  $x = -\frac{p}{2}$ ,  $x = -2$ .

**Задача 2.** Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Оу и проходящей через точку  $(6; -3)$ .

Решение:

Определим расположение параболы на координатной плоскости. Это 4 случай (симметрично относительно оси Оу и проходит через точку  $(6; -3)$ ).

Подставим в уравнение параболы координаты точки  $(6; -3)$ .

$$x^2 = -2py;$$

$$36 =$$

$$-2p(-3)$$

$$p = 6$$

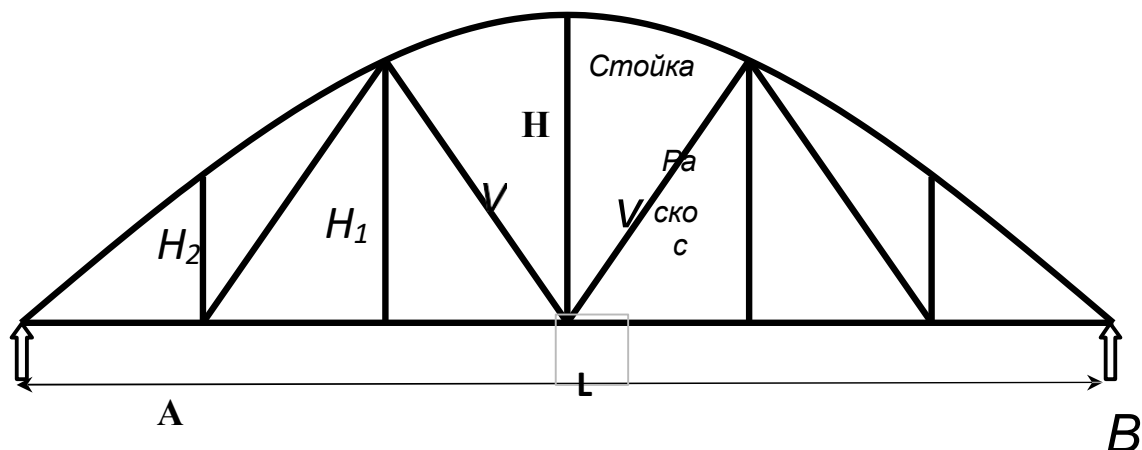
Ответ: уравнение параболы  $x^2 = -12y$ .

## 3. Самостоятельная работа

*Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:*

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Арка моста имеет форму дуги параболы, симметричной относительно центральной стойки Н. Пять вертикальных стоек равноотстоят друг от друга.



Заданы варианты размеров пролёта моста  $AB = L$  и высоты центральной стойки  $H$ . Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале. Составить уравнение арки. Найти длину каждой стойки и длину раскосов  $V$ . Результаты работы записать в таблицу.

Расчет провести с точностью  $\pm 1$  мм.

L	H	Уравнение арки	$H_1$	$H_2$	V
*	*	?	?	?	?

№ вар.	L, м	H, м	№ вар.	L, м	H, м	№ вар.	L, м	H, м
1	12,8	3,1	11	25,7	7,8	21	38,3	13,9
2	14,3	3,6	12	26,9	8,3	22	39,6	14,7
3	15,7	4,1	13	28,1	8,8	23	41,0	15,5
4	17,0	4,5	14	29,3	9,4	24	42,4	16,3
5	18,3	4,9	15	30,5	10,0	25	43,8	17,2
6	19,6	5,3	16	31,8	10,6	26	45,2	18,1
7	20,9	5,8	17	33,1	11,2	27	46,7	19,1
8	22,1	6,3	18	34,4	11,8	28	48,2	20,1
9	23,3	6,8	19	35,7	12,5	29	49,7	21,2
10	24,5	7,3	20	37,0	13,2	30	51,2	22,3

#### 4. Контрольные вопросы по теме

1. Перечислите кривые второго порядка.
2. Дать определение окружности. Назвать ее уравнение.
3. Дать определение эллипса. Назвать его уравнение.
4. Дать определение гиперболы. Назвать ее уравнение.
5. Дать определение параболы. Назвать ее уравнение.
6. Что называется эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?
7. Что называется эксцентриситетом гиперболы?
8. Чему равен эксцентриситет окружности?
- 9.

#### 5. Литература

## Расчетная работа № 7. «Приложение I и II производной» (Исследование функций и построение графиков)

**Цель:** приобрести навыки и умения исследования функций с помощью первой и второй производной и построение их графиков; проверить знания учебного материала.

### *1. Краткие сведения из теории*

Функция называется возрастающей в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется убывающей в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Монотонность функции  $y = f(x)$  характеризуется знаком ее первой производной  $f'(x)$ , а именно:

- если в некотором промежутке  $f'(x) > 0$ , то функция возрастает на этом промежутке.
- если в некотором промежутке  $f'(x) < 0$ , то функция убывает на этом промежутке.
- если в некотором промежутке  $f'(x) = 0$ , то функция постоянна на этом промежутке.

Точка  $x = x_0$  называется точкой максимума функции  $y = f(x)$ , если существует

такая окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x$  ( $x \neq x_0$ ) этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .

Точка  $x = x_0$  называется точкой минимума функции  $y = f(x)$ , если существует такая окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x$  ( $x \neq x_0$ ) этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ .

Точки максимума и минимума функции называются точками ее экстремума, а значение функции в точке максимума (минимума) – максимумом (минимумом) или экстремумом функции.

Необходимое условие экстремума. Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум при

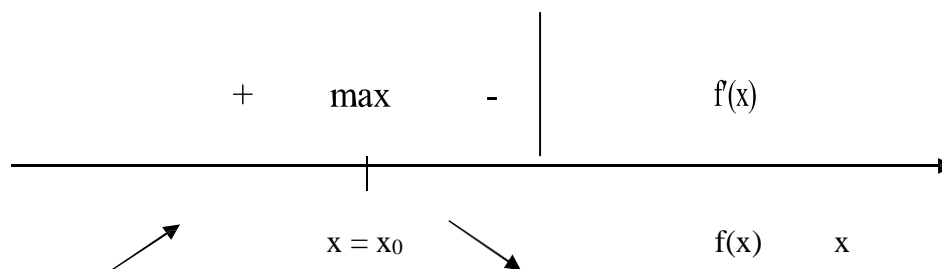
$x = x_0$ , то ее производная в этой точке равна нулю или бесконечности либо вообще не существует, при этом сама функция в точке  $x_0$  определена.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная  $f'(x)$

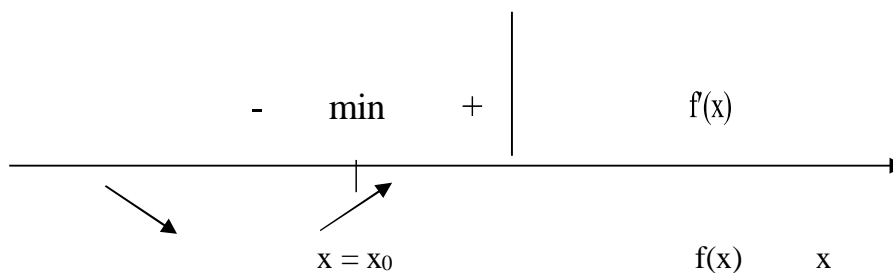
обращается в ноль или терпит разрыв.

Первое достаточное условие существования экстремума функции. Пусть точка  $x = x_0$  является критической точкой I рода функции  $y = f(x)$ , а сама функция дифференцируема во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку (за исключением, возможно, самой этой точки). Тогда:

1) если при переходе слева направо через критическую точку I рода  $x = x_0$  первая производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума, т.е.  $x = x_0$  – точка максимума,  $y_{\max} = f(x_0)$ ;



2) если при переходе слева направо через критическую точку I рода  $x = x_0$  первая производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума, т.е.  $x = x_0$  – точка минимума,  $y_{\min} = f(x_0)$  ;



3) если при переходе через критическую точку I рода первая производная не меняет знака, то в этой точке экстремума нет.

**Пример 1.** Найти экстремумы функции  $y = (1 - x^2)^3$ .

Решение:

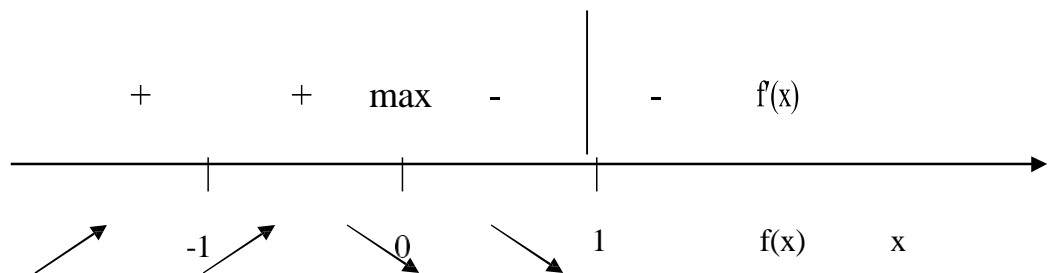
1) Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2) Критические точки определяем из условия  $f'(x) = 0$ . Находим производную:

$$y' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (1 - x^2)' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1 - x^2)^2; y' = 0;$$

$$-6x(1 - x^2)^2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

3) Отметим эти критические точки на числовой прямой.



4) Исследуем знак производной  $y' = -6x(1 - x^2)^2$  в каждом из полученных интервалов:

$$y'(-2) > 0, \quad y'(-0,5) > 0, \quad y'(0,5) < 0, \quad y'(2) < 0.$$

5) Точка  $x = 0$  – точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус:  $y_{\max} = y(0) = 1$ .

Точки  $x = -1$  и  $x = 1$  не являются точками экстремума, так как при переходе через них первая производная не поменяла знак.

Второе достаточное условие существования экстремума функции.

Если в точке

$x = x_0$  первая производная функции равна нулю ( $f'(x_0) = 0$ ), а вторая производная отлична от нуля, то  $x = x_0$  – точка экстремума.

При этом, если вторая производная в этой точке положительна ( $f''(x_0) > 0$ ),

то  $x = x_0$  – точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна ( $f''(x_0) <$

$0$ ), то  $x = x_0$  – точка максимума.

Пример 2. Найти экстремумы функции  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ .

Решение:

1) Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2) Критические точки определяем из условия  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$f'(x) = 0, 3x^2 - 6x = 0,$$

$$3x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

3) Находим вторую производную функции  $f''(x) = 6x - 6$ .

Исследуем знак второй производной в каждой критической точке:

$$f''(0) = -6 < 0; \quad \text{значит, } x = 0 \text{ — точка максимума, } y_{\max} = y(0) = 1.$$

$$f''(2) = 6 > 0; \quad \text{значит, } x = 2 \text{ — точка минимума, } y_{\min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3.$$

Кривая обращена выпуклостью вверх или выпукла ( $\cap$ ) на некотором промежутке, если она расположена ниже касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка.

Кривая обращена выпуклостью вниз или вогнута ( $\cup$ ) на некотором промежутке, если она расположена выше касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) кривой.

График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  является выпуклым на некотором промежутке, если вторая производная функции отрицательна в каждой точке этого промежутка:  $f''(x) < 0$ .



График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  является вогнутым на некотором промежутке, если вторая производная функции положительна в каждой точке этого промежутка:  $f''(x) > 0$ .

Точками перегиба графика функции  $y = f(x)$  могут служить только точки, абсциссы которых являются критическими точками II рода, т.е. точки, находящиеся внутри области определения функции  $y = f(x)$ , в которых вторая производная  $f''(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками перегиба графика функции  $y = f(x)$  являются лишь те из указанных точек, при переходе через которые вторая производная  $f''(x)$  меняет знак.

*Пример 3.* Определить направление вогнутости и точки перегиба кривой

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2.$$

Решение:

1) Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2) Найдем вторую производную функции и критические точки II рода из условия

$$f''(x) = 0 :$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 5 = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 5 ;$$

$$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x - 24 = 12x^2 + 12x - 24 ; f''(x) = 12(x^2 + x - 2);$$

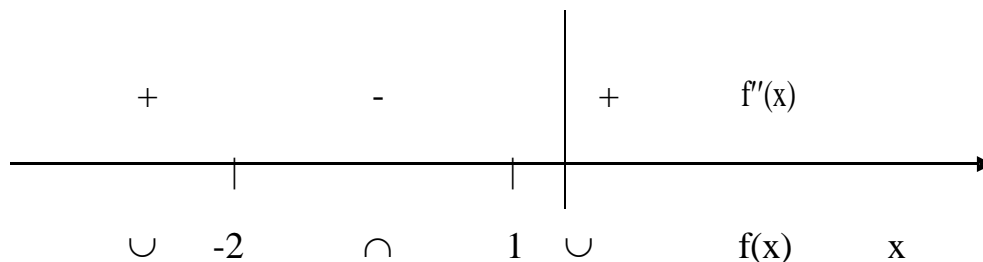
$$f''(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + x - 2 = 0 ,$$

Найдем корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} ,$$

$$x_1 = -2 , \quad x_2 = 1 .$$

3) Отметим критические точки II рода  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$  на числовой прямой.



4) Исследуем знак второй производной в каждом из полученных интервалов:

$$f''(-3) > 0, \quad f''(0) < 0, \quad f''(2) > 0.$$

5) Кривая вогнута при  $x < -2$  и  $x > 1$ ; кривая выпукла при  $-2 < x < 1$ .

Так как при переходе через критические точки II рода  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$  вторая производная поменяла знак, следовательно обе точки являются точками перегиба.

Найдем их вторые координаты:

$$f(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 16 - 16 - 48 + 10 + 2 = -36$$

$$f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 1 + 2 - 12 - 5 + 2 = -12.$$

Т.о. точки перегиба  $(-2; -36)$ ,  $(1; -12)$ .

Для исследования функций и построения графиков функций можно использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции, если она не указана заранее.
2. Проверить функцию на четность и нечетность.
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат ( $f(x) = 0$ ;  $y = f(0)$ ).
5. Найти интервалы знакопостоянства функции.
6. Найти критические точки первого рода, для этого нужно найти первую производную функции и приравнять ее нулю ( $f'(x) = 0$ ); определить, в каких точках она не существует.
7. Проверить критические точки на экстремум, для этого найти вторую производную и определить ее знак ( $f'(x_i) = 0$  - критическая точка – не экстремум,  $f'(x_i) > 0$  - критическая точка – точка минимума функции,  $f'(x_i) < 0$  - критическая точка – точка максимума).

8. Исследовать функцию на монотонность ( $f'(x) > 0$  - функция возрастает,  $f'(x) < 0$  - функция убывает).
9. Найти критические точки второго рода, для этого приравнять нулю вторую производную ( $f''(x) = 0$ ).
10. Найти интервалы выпуклости графика функции ( $f''(x) < 0$  - функция выпуклая,  $f''(x) > 0$  - функция вогнутая).
11. Исследовать критические точки второго рода на точки перегиба (если вторая производная при переходе через критическую точку второго рода меняет знак - критическая точка является точкой перегиба, то есть отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой).

Для исследования функции следует воспользоваться схемой, составить необходимые таблицы, затем по полученным данным построить график функции.

## 2. Решение типовых примеров

*Пример.*

Исследуйте функцию  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  и постройте ее график.

Решение:

1. Областью определения данной функции является все множество действительных чисел:  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .
2.  $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = f(x)$ , то есть функция четная.
3. Функция неперiodическая.
4. Для определения точек пересечения функции с осью  $x$  решаем биквадратное уравнение:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

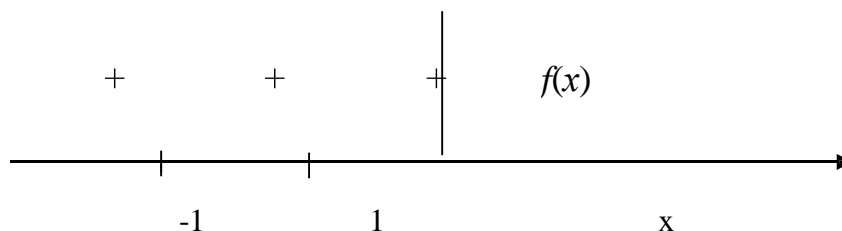
$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Пересечение с осью  $y$ :  $f(0) = 1$ .

5. Найдем интервалы знакопостоянства функции: отметим на оси  $x$  точки пересечения функции с этой осью и определим знак исследуемой функции на каждом полученном интервале.



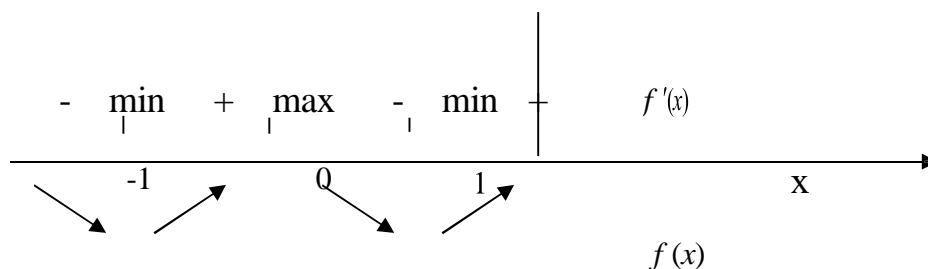
Функция  $f(x) > 0$  при всех  $x$  кроме  $x_1$  и  $x_2$ .

6.  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1) = 0$ ;  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ .

7. Вычисляем вторую производную и находим ее значение в критических точках первого рода:  $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$ ;

$f'(-1) = 8 > 0$ ;  $f'(0) = -4 < 0$ ;  $f'(1) = 8 > 0$ , то есть  $x = -1$  – точка минимума функции,  $x = 0$  – точка максимума;  $x = 1$  – точка минимума.

8. Исследуем функцию на монотонность: отметим на оси  $x$  критические точки первого рода и определим знак первой производной на каждом полученном интервале.



Первая производная  $f'(x) = 4x(x+1)(x-1)$  имеет следующие знаки:

при  $x \in (-\infty; -1)$   $f'(x) < 0$  – функция убывает; функция

при  $x \in (-1; 0)$   $f'(x) > 0$  – возрастает; функция убывает;

при  $x \in (0; 1)$   $f'(x) < 0$  – функция возрастает.

при  $x \in (1; +\infty)$   $f'(x) > 0$  –

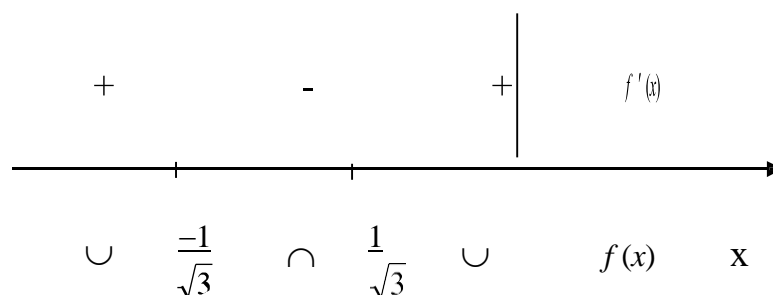
Результаты исследования приводятся в таблице:

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 1)$	$1$	$(1; \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f''(x)$		8		-4		8	
$f(x)$	убывает	min 0	возрастает	max 1	убывает	min 0	возрастает

9. Для определения критических точек второго рода приравняем нулю вторую производную  $f'(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 0$  и находим:  $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$  и

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

10. Найдем интервалы выпуклости графика функции: отметим на оси  $x$  критические точки второго рода и определим знак второй производной на каждом полученном интервале.



Вторая производная  
при  $x \in \left( -\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  положительна – функция вогнутая;

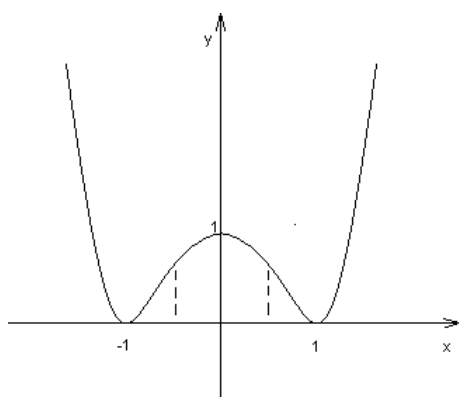
при  $x \in \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  отрицательна – функция выпуклая;

при  $x \in \left( \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right)$  положительна – функция вогнутая.

11. Обе критические точки являются точками перегиба, так как в них происходит изменение знака второй производной.

Результаты исследования приводятся в таблице:

$x$		$(-\infty; -1/\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	$(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$	$1/\sqrt{3}$	$(1/\sqrt{3}; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	вогнутая	перегиб 4/9	выпуклая	перегиб 4/9	вогнутая	



Пользуясь четностью функции, построим график для правой полуплоскости, а затем отразим его симметрично относительно оси  $y$ . Нанесем на график точки пересечения с осями:  $(1; 0)$  и  $(0; 1)$ . Точка  $(0; 1)$  является точкой максимума; точка  $(1; 0)$  - точкой минимума. В промежутке между этими точками функция

убывает, в точке  $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$  функция меняет свою вогнутость на выпуклость.

После  $x = 1$  функция возрастает.

### 3. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:

- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

*Исследовать функцию и построить ее график. В соответствии с номером варианта.*

Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция
<b>1.</b>	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$	<b>2.</b>	$f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$	<b>3.</b>	$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$
<b>4.</b>	$f(x) = \frac{1}{3}x - x^3$	<b>5.</b>	$f(x) = 3x^2 - x^3$	<b>6.</b>	$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
<b>7.</b>	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$	<b>8.</b>	$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$	<b>9.</b>	$f(x) = 5x^2 - \frac{5}{3}x^3$
<b>10.</b>	$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$	<b>11.</b>	$f(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3$	<b>12.</b>	$f(x) = 6x^2 - 9x - x^3$
<b>13.</b>	$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x^2$	<b>14.</b>	$f(x) = -x^3 + x$	<b>15.</b>	$f(x) = 3x^3 - x + 2$
<b>16.</b>	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$	<b>17.</b>	$f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$	<b>18.</b>	$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$
<b>19.</b>	$f(x) = \frac{1}{3}x - x^3$	<b>20.</b>	$f(x) = 3x^2 - x^3$	<b>21.</b>	$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
<b>22.</b>	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$	<b>23.</b>	$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$	<b>24.</b>	$f(x) = 5x^2 - \frac{5}{3}x^3$
<b>25.</b>	$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$	<b>26.</b>	$f(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3$	<b>27.</b>	$f(x) = 6x^2 - 9x - x^3$

#### **4. Контрольные вопросы по теме**

1. Дать определение области определения функции.
2. Дать определение четности и нечетности функции.
3. Дать определение возрастающей и убывающей функции.
4. Дать определение точек экстремума.
5. Дать определение промежутков выпуклости и вогнутости.
6. Дать определение точек перегиба функции.

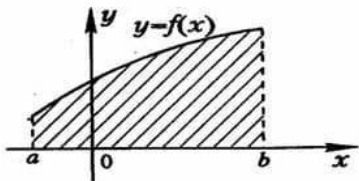
#### **5. Литература**

О[1] § 9.15 № 9.65 – 9.67; §49-50 № 900 (4; 5); 915 (1;2); § 55

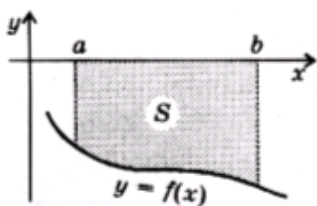
## Расчетная работа № 8. «Приложение определенного интеграла» (Расчет площади арочного окна)

**Цель:** расширить и систематизировать знания студентов о применении определенного интеграла в профессии; закрепить навыки вычисления определенного интеграла; проверить знания учебного материала.

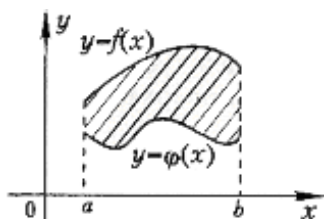
### 1. Краткие сведения из теории



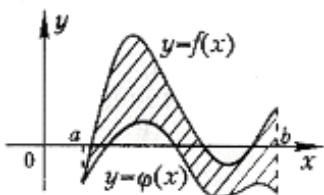
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



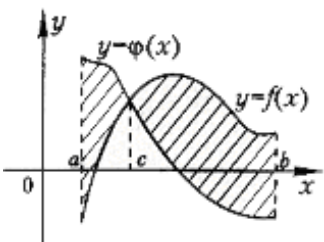
$$S = - \int_a^b f(x) dx$$



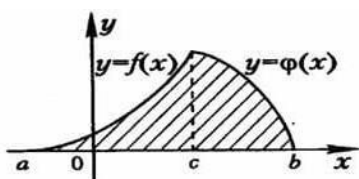
$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx;$$



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx;$$



$$S = \int_a^c (\varphi(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - \varphi(x)) dx;$$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$



## 2. Решение типовых примеров

Пример 1. Найти площадь фигуры ограниченной линиями:

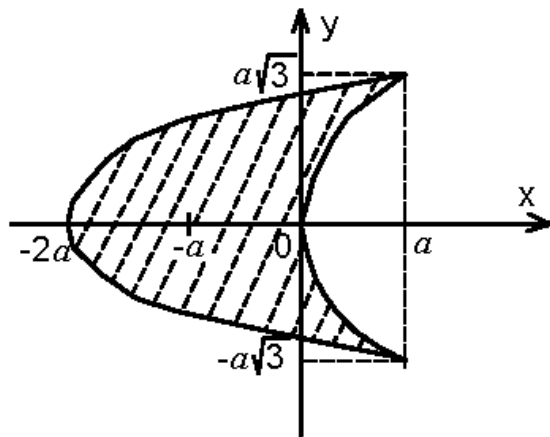
$$x^2 + 2ax - y^2 = 0 \text{ и } ax - y^2 + 2a^2 = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. 1-й способ. Данная фигура не является стандартной относительно оси  $Ox$ , но её можно разбить на три стандартные относительно оси  $Ox$  области:

$$F_1 = \{x, y \mid -2a \leq x \leq 0; -\sqrt{2a^2 + ax} \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\},$$

$$F_2 = \{x, y \mid 0 \leq x \leq a; \sqrt{x^2 + 2ax} \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\},$$

$$F_3 = \{x, y \mid 0 \leq x \leq a; -\sqrt{2a^2 + ax} \leq y \leq -\sqrt{x^2 + 2ax}\}.$$



Из симметрии фигуры относительно оси  $Ox$  видно, что её площадь  $S$  есть удвоенная площадь фигуры, являющейся объединением двух стандартных относительно оси  $Ox$  фигур

$$\tilde{F}_1 = \{x, y \mid -2a \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\} \text{ и } F_2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S &= 2 \left( \int_{-2a}^0 \sqrt{2a^2 + ax} dx + \int_0^a (\sqrt{2a^2 + ax} - \sqrt{x^2 + 2ax}) dx \right) = \\ &= 2 \left[ \frac{2}{3a} (ax + 2a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2a}^a - \left( \frac{x+a}{2} \sqrt{x^2 + 2ax} \right) \Big|_0^a + \\ &= \frac{a^2}{2} \ln(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}) \Big|_0^a = 2a^2 \sqrt{3} + a^2 \ln(2 + \sqrt{3}) \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

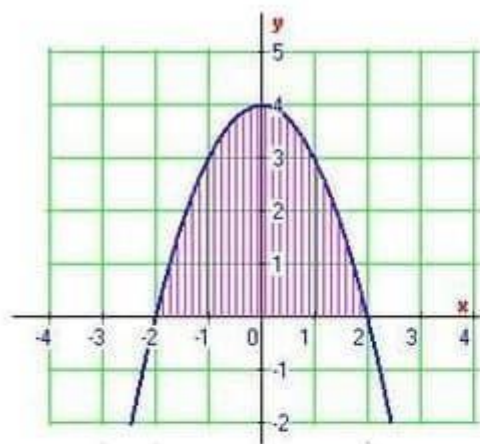
2-й способ. Однако проще было в данной задаче сразу рассмотреть фигуру как стандартную относительно оси  $Oy$ :

$$F = \left\{ (x, y) \mid -a\sqrt{3} \leq y \leq a\sqrt{3}; \frac{y^2 - 2a^2}{a} \leq x \leq -a + \sqrt{y^2 + a^2} \right\}.$$

Снова используя симметрию, получаем

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{a\sqrt{3}} \left( \sqrt{y^2 + a^2} - a - \frac{y^2}{a} + 2a \right) dy = 2a^2\sqrt{3} + \\
 &+ \left( y\sqrt{y^2 + a^2} + a^2 \ln|y + \sqrt{y^2 + a^2}| - \frac{2y^3}{3a} \right) \Big|_0^{a\sqrt{3}} = \\
 &= 2a^2\sqrt{3} + a^2 \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ (кв.ед)}.
 \end{aligned}$$

*Пример 2.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:



Нужно найти площадь заштрихованной фигуры.

Пределы интегрирования:

$$4 - x^2 = 0.$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left( 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

### 3. Самостоятельная работа

*Самостоятельная работа по теме занятия включает в себя:*

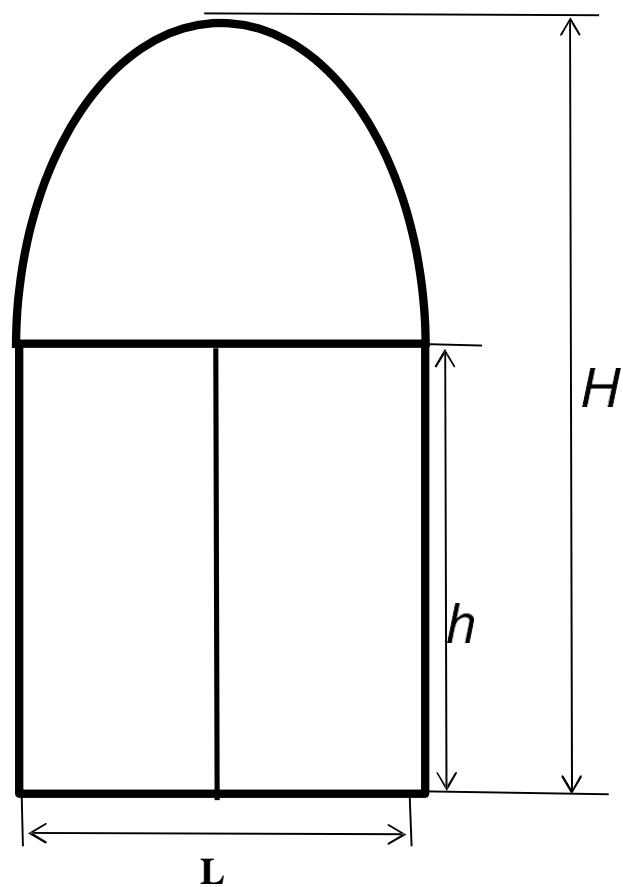
- Изучение теоретического материала лекционных занятий, учебной литературы, Интернет-ресурсов, раздела «Краткие сведения из теории» настоящего описания ПЗ;
- Выполнения практических заданий и решение задач.

Окно представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из прямоугольной нижней части и параболической верхней.

Размеры окна обозначены на рисунке и представлены в таблице. Найти площадь окна с точностью  $\pm 1 \text{ см}^2$ .

Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале.

№ варианта	$H, м$	$h, м$	$L, м$
1	2,1	1,8	1,2
2	2,1	1,7	1,2
3	2,1	1,6	1,2
4	2,1	1,5	1,2
5	2,1	1,4	1,2
6	2,1	1,3	1,2
7	2,1	1,2	1,2
8	2,1	1,1	1,2
9	2,1	1,0	1,2
10	2,1	0,9	1,2
11	1,8	1,6	0,9
12	1,8	1,5	0,9
13	1,8	1,4	0,9
14	1,8	1,3	0,9
15	1,8	1,2	0,6
16	1,8	1,1	0,6
17	1,8	1,0	0,6
18	1,8	0,9	0,6
19	1,8	0,8	0,6
20	1,8	0,7	0,6
21	1,5	1,2	0,45
22	1,5	1,1	0,45
23	1,5	1,0	0,45
24	1,5	0,9	0,45
25	1,5	0,8	0,45
26	1,5	0,7	0,45
27	1,5	0,6	0,45
28	1,5	0,5	0,45
29	1,5	0,4	0,45
30	1,5	0,3	0,45



#### 4. Контрольные вопросы по теме

1. Дать определение криволинейной трапеции.
2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
3. Сформулировать план нахождения площади криволинейной фигуры.

#### 5. Литература

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

### Печатные издания

#### *Основные источники:*

1. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 400 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15555-6. — Текст: непосредственный.
2. Лачуга, Ю. Ф. Прикладная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Самсонов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 304 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13214-4. — Текст: непосредственный.

#### *Дополнительные источники:*

1. Богомолов, Н. В. Геометрия : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — Москва : Юрайт, 2021. — 107 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9. — Текст : непосредственный.
2. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — Москва : Юрайт, 2020. — 400 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : непосредственный.
3. Дадаян, А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). — ISBN 978-5-16-012592-3. — Текст : непосредственный.

### Электронные ресурсы

#### *Электронные издания:*

1. Богомолов, Н. В. Геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511955> (дата обращения: 20.04.2023).— Режим доступа: по подписке.
2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 755 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-16211-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/530620> (дата обращения: 20.04.2023). Режим доступа: по подписке.
3. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511565> (дата обращения: 20.04.2023).— Режим доступа: по подписке.

4. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/512668> (дата обращения: 20.04.2023)..— Режим доступа: по подписке.
5. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/512669> (дата обращения: 20.04.2023). — Режим доступа: по подписке.
6. Дадаян, А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). — ISBN 978-5-16-012592-3. — Текст : электронный. — URL: <https://znanium.com/catalog/product/1891827> (дата обращения: 20.04.2023). — Режим доступа: по подписке.
7. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 400 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15555-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/512130> (дата обращения: 20.04.2023). — Режим доступа: по подписке.
8. Лачуга, Ю. Ф. Прикладная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Самсонов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 304 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13214-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517325> (дата обращения: 20.04.2023). — Режим доступа: по подписке.

#### **Интернет-ресурсы:**

1. Математика в Открытом колледже [Электронный ресурс]. — URL :<http://www.mathematics.ru>. — Текст : электронный.